1 Metrické prostory

1.1 Úplné metrické prostory

Pojem 1.1 (Cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru) *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $\{X_n\}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{X_n\}$ je **cauchyovská**, jestliže platí:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 : \rho(X_n, X_m < \varepsilon)$$

Pojem 1.2 (Úplný metrický prostor) *Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost v (P, ρ) je konvergentní v (P, ρ).*

Věta 1.1 (O vztahu kompaktnosti a úplnosti) *Nechť je (P, ρ) kompaktní. Pak (P, ρ) je úplný.*

Věta 1.2 (O vztahu uzavřenosti a úplnosti) *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor. $M \subset P$ Pak platí $(M, \rho\,|_{M \times M})$ je úplný $\Leftrightarrow$ M je uzavřená v (P, ρ).*

Definice 1.1 (Průměr množiny) *Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $A \neq \emptyset$. **Diametrem** množiny A rozumíme:*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x, y); x \in A, y \in A\}$$

Definice 1.2 (Supremová metrika) $\rho(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

Definice 1.3 (Integrální metrika) $\rho(f, g) = \sup \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

Definice 1.4 (Zděděná metrika) *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a nechť $A \subset P, A \neq \emptyset$ potom (A, ρ) je opět metrický prostor se **zděděnou (indukovanou)** metrikou ρ.*

Věta 1.3 (Cantorova věta - bez důkazu) *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak je ekvivalentní:*

(i) *(P, ρ) je úplný*

(ii) *Pro každou posloupnost v (P, ρ) uzavřených neprázdných množin $\{A_n\}$, která splňuje: $\lim \operatorname{diam} A_n = 0$ a $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, platí že $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je jednoprvková množina.*

1.2 Banachova věta o kontrakci

Pojem 1.3 (Kontrakce) *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $T : P \to P$. Řekneme, že T je **kontrakce**, jestliže existuje $\gamma \in \langle 0, 1)$ takové, že*

$$\forall x, y \in P : \rho(T(x), T(y)) \leq \gamma \rho(x, y)$$

Věta 1.4 (Banachova věta o kontrakci) *Nechť (P, ρ) je úplný, neprázdný metrický prostor a $T : P \to P$ je kontrakce. Pak existuje $x^* \in P$ takové, že $T(x^*) = x^*$. Takové x^* existuje právě jedno.*

Definice 1.5 (Neexpanzivní zobrazení) *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $T : P \to P$. Řekneme, že T je* ***neexpanzivní zobrazení*** *jestliže:*

$$\forall x, y \in P, x \neq y : \rho(T(x), T(y)) < \rho(x, y)$$

Věta 1.5 (O pevném bodu neexpanzivního zobrazení) *Nechť (P, ρ) je kompaktní, $T : P \to P$ neexpanzivní. Potom T má v D právě jeden pevný bod.*

Věta 1.6 (O pevném bodu mocniny kontrakce) *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $T : P \to P$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že T^n je kontrakce. Potom T má v P právě jeden pevný bod.*

1.3 Souvislé metrické prostory

Pojem 1.4 (Souvislý prostor) *Metrický prostor (P, ρ) se nazývá* ***nesouvislý****, jestliže existují dvě neprázdné, otevřené a disjinktní množiny G_1, G_2 takové, že $P = G_1 \cup G_2$. V opačném případě je (P, ρ)* ***souvislý****. Neprázdná podmnožina A prostoru P se nazývá nesouvislá, jestliže je metrický prostor (A, ρ) nesouvislý.*

Definice 1.6 (Obojetná množina) *Množina $H \subset P$ se nazývá* ***obojetná****, jestliže je neprázdná, různá od P, otevřená a uzavřená.*

Věta 1.7 (Charakterizace souvislých prostorů) *Pro (P, ρ) je ekvivalentní:*

(i) *P je nesouvislý*

(ii) *existuje obojetná množina $H \subset P$*

(iii) *existuje spojité zobrazení $f : P \overset{\text{na}}{\to} \{0, 1\}$*

(iv) *existují dvě neprázdné disjunktní a uzavřené množiny F_1, F_2, $P = F_1 \cup F_2$*

Věta 1.8 (Vlastnosti souvislých prostorů) *(P, ρ) je metrický prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina*

(ii) *Nechť A je souvislá množina v (P, ρ). Nechť $A \subset B \subset \overline{A}$. Potom B je souvislá (a spec $\overline{A}$ je souvislá).*

(iii) *Nechť množiny $\{A_\alpha\}$ jsou sovislé v (P, ρ) a nechť $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$ potom $\bigcap_\alpha A_\alpha$ je souvislá.*

(iv) *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ potom A je souvislá $\Leftrightarrow$ A je interval.*

Definice 1.7 (Oblouk) *Množina $I \subset (P, \rho)$ se nazývá* ***oblouk****, jestliže je to spojitý obraz uzavřeného intervalu.*

Definice 1.8 (Obloukově souvislá množina) *Množina $A \subset (P, \rho)$ se nazývá* ***obloukově souvislá****, jestliže lze každé dva její body spojit obloukem.*

Věta 1.9 (O vztahu souvislosti a obloukové souvislosti) *Každá obloukově souvislá množina je souvislá.*

2 Obyčejné diferenciální rovnice

2.1 Obyčejné diferenciální rovnice - základní pojmy a věty

Definice 2.1 (Rozšíření řešení - nezk.) *Řekneme, že* $(\overline{y}, \overline{I})$ *je rozšířením řešení* (y, I), *jestliže:*

(i) $\overline{y}$ *řeší dif. rovnici na* $\overline{I}$

(ii) $I \subsetneqq \overline{I}$

(iii) $\overline{y} = y$ *na* I

Pojem 2.1 (Maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice) (y, I) *je* ***maximální (úplné)*** *řešení diff. rovnice, jestliže*

(i) y *řeší na* I

(ii) neexistuje žádné rozšíření

Věta 2.1 (Peanova věta - bez důkazu) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^{\ltimes+\nVdash}$, $f \in C(\Omega)$. *Nechť* $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$, *potom existuje interval* $U(x_0)$ *a funkce* y *definovaná aspoň na* $U(x_0)$ *tak, že*

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n-1}(x)) \\
y(x_0) &= y_0 \\
y'(x_0) &= y_1 \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}
\end{aligned}$$

Definice 2.2 (Rovnice rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci)

$$y^{(n)}(x_0) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n-1}(x))$$

Definice 2.3 (Lokálne lipschitzovské funkce více proměnných) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *splňuje* ***lokální lipschitzovskou podmínku*** *vzhledem posledním* n *proměnným, jestliže:*

$$\forall U \subset \Omega, \text{omezená}, \exists K, \forall (x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}), (x, \overline{y_0}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{n+1}}) \in U :$$
$$|f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) - f(x, \overline{y_0}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{n+1}})| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \overline{y_i}|$$

2.2 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 2.2 (Peanova pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu - nezk.) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *spojitá*, $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Potom* $\exists (x_0 - \delta, x_0 - \gamma) \exists y$ *definovaná aspoň na* $(x_0 - \delta, x_0 + \gamma)$ *taková, že:*

$$\begin{aligned}
y'(x) &= f(x, y(x)) \\
y(x_0) &= y_0
\end{aligned}$$

Věta 2.3 (Picardova pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *spojitá*, $(x_0, y_0) \in \Omega$ *a nechť platí podmínka lokální lipschitzovskosti pro y:*

$$\forall U \subset \Omega \exists K : |f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq K(x - \overline{y}) \qquad (x,y),(x,\overline{y}) \in U$$

Potom je řešení lokálně jednoznačné. (Každá dvě řešení splývají na průniku svých definičních oborů, existuje-li maximální řešení, pak je jediné)

Definice 2.4 (Obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými)

$$y' = f(x)g(y)$$

Věta 2.4 (O existenci řešení rovnice se separovanými proměnnými - bez důkazu) *Nechť* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *spojitá*, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ *spojitá a nenulová*, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$. *Pak bodem* (x_0, y_0) *prochází právě jedno maximální řešení y rovnice* $y' = f(x)g(x)$, $y(x_0) = y_0$.

Definice 2.5 (Lineární obyčejné diferenciální rovnice)

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)y(x) + b(x) \\ y' &= ay + b \end{aligned}$$

a, b spojité funkce na I

2.3 Systémy lineárních rovnic 1. řádu a lineární rovnice řádu n

Definice 2.6 (Lineární obyčejná diferenciální rovnice - nezk.) $I \subset \mathbb{R}$, $a_i : I \to \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n-1, b : I \to \mathbb{R}$ *spojité. Rovnici* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b$ *nazveme* ***lineární ODR řádu n****.*

Definice 2.7 (Systém lineárních obyčejnách diferenciálních rovnic)

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R} \\ a_{ij} : I \to \mathbb{R} \\ b_i : I \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{spojité}$$

Podmínky: $y_i(x_0) = (y^0)_i$. *Zkrácený maticový zápis:* $y' = Ay + b$, *kde y, b jsou vektorové funkce* $y, b :\to \mathbb{R}^n$, *A maticová funkce* $A : I \to \mathbb{R}^{n^2}$.

Věta 2.5 (O globální existenci a jednoznačnosti řešení systému lineárních ODR 1. řádu) $I \subset \mathbb{R}$, $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$ *spojité*, $i,j = 1, \ldots, n$, $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. *Potom existuje právě jedno řešení y systému* $y' = Ax + b$ *jehož definičním oborem je I splňující okrajovou podmínku* $y(x_0) = y^0$. *To jest*

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j(x) + b_i(x) \quad \forall x \in I \quad i = 1, \ldots, n$$

a podm. $y_i(x_0) = (y^0)_i$

Věta 2.6 (Vlastnosti prostoru řešení systému lineárních ODR 1. řádu) *Nechť je dán systém $y' = Ax + b$, s obvyklými podmínkami. Označíme-li $Ly = y' - Ay$, $H = \operatorname{Ker} L = \{y, Ly = 0\}$, pak platí:*

(i) L je lineární zobrazení, H je vektorový prostor dimenze n.

(ii) Označme $M = \{y, Ly = b\}$. Potom existuje y_0 takové, že $M = y_0 + H = \{y_0 + h, h \in H\}$ a $Ly_0 = b$

Pojem 2.2 (Fundamentální matice homogenního systému ODR 1. řádu) ***Fundamentálním systémem řešení homogenního systému*** *$y' = Ay + b$ nazýváme libovolnou bázi prostoru H. Nechť $[y^1, \dots, y^n]$ je FSŘ systému $y' = Ay + b$, potom fukce y^i chápeme jako sloupcové vektory, které lze poskládat do tzv.* ***fundamentální matice homogenního systému***

Definice 2.8 (Wronského determinant) *Nechť $f^1, \dots, f^n$ jsou vektorové funkce na I. Pak* ***Wronskiánem*** *funkcí $f^1, \dots, f^n$ nazýváme funkci $W(x) = W_{(f^1,\dots,f^n)}, W : I \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem:*

$$W_{f^1,\dots,f^n}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & \dots & f_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^1(x) & \dots & f_n^n(x) \end{pmatrix}, x \in I$$

Věta 2.7 (O Wronskiánu a lineární závislosti řešení) *Nechť $[y^1, \dots, y^n]$ jsou řešení systému $y' = Ay$, kde A je spojitá matice*

(i) jestliže $W(x_0) = 0$ pro nějaké $x_0 \in I$, pak je $W(x) \equiv 0$ pro všechna $x \in I$ a $[y^1, \dots, y^n]$ jsou lineárně závislé

(ii) jestliže $W(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in I$, pak je $W(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a $[y^1, \dots, y^n]$ jsou lineárně nezávislé.

Věta 2.8 (O variaci konstant pro systém lineárních ODR 1. řádu) *Nechť A, b spojité, nechť $[y^1, \dots, y^n]$ je FSŘ homogenního systému $y' = Ay + b$. Potom existují $c_1, \dots, c_n : I \to \mathbb{R}, c_i \in C(I)$ takové, že $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) y^i(x)$ je řešením nehomogenního systému $y' = Ay + b$.*

2.4 Rovnice a systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty

Definice 2.9 (Vlastní číslo a vlastní vektor matice) *λ je* ***vlastní číslo*** *matice A, pokud existuje nenulový vektor v tak, že $Av = \lambda v$. Takový vektor se nazývá* ***vlastní vektor*** *příslušný k λ. v je vlastní vektor příslušný k $\lambda \Leftrightarrow v$ je nenulovým řešením soustavy $(A - \lambda E)v = 0$. lambda je vlastní číslo matice A, jestliže platí: $P(\lambda) = \det(A - \lambda E), P(\lambda) = 0$.*

Věta 2.9 (O FSŘ systému lineárních ODR 1. řádu s bází z vlastních vektorů) *Nechť A je podobná diagonální matici, nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla A (každé tolikrát, kolik je jeho násobnost), $v^1, \dots, v^n$ jsou příslušné vektory. Potom matice $(v^1 e^{\lambda_1 x}, \dots, v^n e^{\lambda_n x})$ tvoří FSŘ systému $y' = Ay + b$.*

Definice 2.10 (Přidružený vektor, řetězec) *Systém nenulových vektorů* $v^1, \dots, v^k$ *nazveme* ***řetězcem*** *odpovídajícím vlastnímu číslu* λ *matice* A*, jestliže:*

$$\begin{array}{rcll} (A-\lambda E)v^1 & = & 0 & v^1 \textit{ vlastní} \\ (A-\lambda E)v^2 & = & v^1 & v^2 \textit{ přidružený vektor stupně 1} \\ & \vdots & & \\ (A-\lambda E)v^k & = & v^{k-1} & v^k \textit{ přidružený vektor stupně } k-1 \end{array}$$

Ke každému Jordanovu bloku délky k *existuje řetězec délky* k*.*

Definice 2.11 (Exponenciála matice) *Nechť* A *je čtvercová matice typu* $(n \times n)$*. Potom* $\exp A$ *označuje čtvercovou matici* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$*. Speciálně definujeme maticovou funkci* $e^{Ax} = \sum \frac{A^k x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R}$*.*

Věta 2.10 (Vlastnosti exponenciály na matici - bez důkazu)

(i) A*,* B *typu* $(n \times n)$*, potom* $e^{A+B} = e^A e^B$

(ii) $\frac{d}{dx}(e^{Ax}) = Ae^{Ax}$

Věta 2.11 (O FSŘ systému lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty) *Nechť* A *je čtvercová, typu* $(n \times n)$*,* $H = \{y, y' = Ay\}$*. Potom* $H = \{y = e^{Ax}v, v \in \mathbb{R}^n\}$ *a existuje FSŘ* H *ve tvaru* $(y^1, \dots, y^n)$*, kde* $y^j = e^{\lambda_j x} \begin{pmatrix} P_1^j(x) \\ \vdots \\ P_n^j(x) \end{pmatrix}$*, přičemž* λ_i *je vlastní číslo* A *a* P_i^j *jsou polynomy stupně* $\leq$ *násobnosti* λ_j*.*

3 Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$

3.1 Vnější míra, míra, měřitelné množiny a funkce

Definice 3.1 (Objem intervalu v $\mathbb{R}^n$) ***Interval v*** $\mathbb{R}^n$ *je jakákoliv množina tvaru* $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ ***Jordan-Peanův objem*** *intervalu* I *je* $\mathrm{vol}(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$*.*

Pojem 3.1 (Vnější míra) *Pro* $A \subset \mathbb{R}^n$ *libovolnou definujeme její* ***vnější míru*** $\lambda^*(A)$ *předpisem* $\lambda^* = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j), A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \, interval\}$*.*

Věta 3.1 (Vlastnosti vnější míry - bez důkazu)

(i) λ^* *je definovaná na celém* $\exp(\mathbb{R}^n) = \{A, A \subset \mathbb{R}^n\}$

(ii) $\lambda^* \geq 0 \quad \forall A \in \exp(\mathbb{R}^n)$

(iii) Míra prázdné množiny je 0.

(iv) $A \subset B \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ *- monotonie vnější míry.*

(v) $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$ *- spočetná subaditivita.*

Pojem 3.2 (Lebesgueova míra a lebesgueovsky měřitelná funkce) *Řekneme, že množina A je* ***lebesgueovsky měřitelná****, jestliže pro každý interval I platí:*

$$\lambda^*(I) = \lambda^*(I \cap A) + \lambda^*(I \setminus A)$$

Pak ***Lebesgueovou mírou*** *množiny A je $\lambda(A) = \lambda^*(A)$*

Definice 3.2 (σ-algebra) *Nechť X je množina, $\exp X$ systém všech podmnožin. Něchť $\mathcal{A} \subset \exp X$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je* ***algebra****, jestliže*

- $X \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \subset \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{A}$

Řekneme, že $\mathcal{A}$ je ***σ-algebra****, jestliže je to algebra a navíc*

- $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

Věta 3.2 (Vlastnosti měřitelných množin - bez důkazu) $\mathcal{M} \subset \exp(\mathbb{R}^n)$ *je systém měřitelných množin. Potom:*

(i) $\mathcal{M}$ *je σ-algebra.*

(ii) G *otevřená* $\Rightarrow G \in \mathcal{M}$, F *uzavřená* $\Rightarrow F \in \mathcal{M}$.

(iii) $\mathcal{M}$ *je největší σ-algebra taková, že*

- *obsahuje intervaly*
- λ^* *je na ní σ-aditivní* $\lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$.

(iv) Existují neměřitelné množiny v $\mathbb{R}^n$

Věta 3.3 (Vlastnosti Lebesgueovy míry - bez důkazu)

(i) λ *je definovaná na* $\mathcal{M}$, $\lambda(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{M}$, $\lambda(\emptyset) = 0$.

(ii) $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)$

(iii) $\lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \quad \forall A_j$ *měřitelné, disjunktní - σ-aditivita míry.*

(iv) λ *je translačně a rotačně invariantní.*

(v) λ *je úplná:* $\forall A, \lambda(A) = 0, \forall B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{M}, \lambda(B) = 0$

Definice 3.3 (Platnost výroku skoro všude) *Řekneme, že výrok $V(x)$ platí* ***skoro všude*** *na A (pro skoro všechna $x \in A$), jestli že $\exists N \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $\lambda(N) = 0$ a V platí $\forall x \in A$ N. Zkracujeme s.v.*

Pojem 3.3 (Lebegueovsky měřitelná funkce) *$f : A \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je* ***měřitelná funkce*** *na A, jestliže*

- *f je definovaná aspoň s.v. na A*
- *$\forall \alpha > 0$ je $\{x \in A, f(x) > \alpha\}$ měřitelná*

Definice 3.4 (Charakteristická funkce) *$E \subset \mathbb{R}^n$. Definujeme* ***charakteristickou funkci*** *množiny E:*

$$\lambda_E(x) \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Věta 3.4 (Vlastnosti měřitelných funkcí - bez důkazu) *f, g, $\{f_n\}$ měřitelné funkce na $M \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(i) *$P \subset M$, $P \in \mathcal{M} \Rightarrow f$ měřitelná na P.*

(ii) *f měřitelná na $M_i, i \in \mathbb{N}$, potom f je měřitelná na $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.*

(iii) *$f + g$, $f - g$, αg, $\frac{f}{g}$ $(f \neq 0)$ jsou měřitelná tam, kde výrazy mají smysl.*

(iv) *f^+, f^-, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ měřitelné na M.*

(v) *$\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$, $\sum f_n$ jsou měřitelné tam, kde to má smysl.*

(vi) *$F \in C(M)$, $M \in \mathcal{M} \Rightarrow F$ měřitelná.*

(vii) *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelné, pak $F(f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je měřitelná.*

3.2 Lebesgueův integrál - konstrukce a základní vlastnosti

Definice 3.5 (Jednoduchá funkce) *Funkce S na M se nazývá* ***jednoduchá****, jestliže:*

(i) *je definována s.v. na M*

(ii) *nabývá konečně mnoha konečných hodnot*

Věta o aproximaci jednoduchými funkcemi???????????????????????????

Definice 3.6 (Lebesgueův integrál jednoduché funkce) *Nechť S je $\sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_{A_i}$ nezápornná, měřitelná jednoduchá funkce na M. Pak* ***Lebesgueovým integrálem*** *funkce S nazýváme číslo*

$$(L) \int_M S(x)dx = \sum_{j=1}^{N} c_i \lambda_{A_i}$$

Pojem 3.4 (Lebesgueův integrál z dané funkce) *Nechť f je nezáporná měřitelná funkce. Pak definujeme*

$$(L) \int_M f(x)dx = \sup_{0 \leq S \leq f} (L) \int_M S(x)dx$$

Nechť f je libovolná (ne nutně ≥ 0) měřitelná funkce. Pak definujeme

$$(L) \int_M f(x)dx = (L) \int_M f^+(x)dx - (L) \int_M f^-(x)dx$$

Věta 3.5 (O existenci a konvergenci Lebesgueova integrálu - bez důkazu)

(i) $f \leq g$ *s.v. na* M, $\exists \int_M g < +\infty \Rightarrow \exists \int_M f < +\infty$. $\exists \int_M f > -\infty \Rightarrow \exists \int_M g > -\infty$

(ii) $g \leq f \leq h$ *s.v. na* M, $g, h \in L(M)$, *pak* $f \in L(M) \& \int_M g \leq \int_M f \leq \int_M h$

(iii) $c_1 \leq f \leq c_2$ *s.v. na* M, $\lambda(M) < \infty \Rightarrow c_1\lambda(M) \leq \int_M \leq c_2\lambda(M)$

(iv) $|f| \leq g$, *s.v. na* M, $g \in L(M) \Rightarrow f \in L(M)$, $\int_M |f| \leq \int_M g$

Věta 3.6 (Srovnávací kritérium pro konvergenci Lebesgueova integrálu - bez důkazu) $f, g \geq 0$, *spojité na* $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. *Nechť* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

(i) *Je-li* $A \in (0, \infty)$, *pak* $\int_a^b f$ *konverguje* $\Leftrightarrow \int_a^b g$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $A = 0$, *pak* $\int_a^b g$ *konverguje* $\Leftrightarrow \int_a^b f$ *konverguje.*

(iii) *Je-li* $A = \infty$, *pak* $\int_a^b g$ *diverguje* $\Leftrightarrow \int_a^b f$ *diverguje.*

Analogicky pro $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, $f, g \geq 0$, *spojité na* $(a, b]$

Věta 3.7 (O vztahu Lebesgueova a Newtonova integrálu) $f \geq 0$, *spojitá na* (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. *Potom* $(L)\int_a^b f(x)dx = (N)\int_a^b f(x)dx$. *(Oba existují a rovnají se, možnost* $\int = \infty$ *připouštíme)*

Definice 3.7 (Existence a konvergence Lebesgueova integrálu) *Říkáme, že* $\int f(x)dx$ *existuje, jestliže je definován. (rozdíl* $f^+ - f^-$ *má smysl - aspon jedno z čísel* f^+ *,*f^- *je konečné) Říkáme, že* $\int f(x)dx$ *konverguje, jestliže existuje a je konečný. (obě čísla* f^+ *,*f^- *jsou konečná)*

Věta 3.8 (Srovnávací škály pro konvergenci Lebesgueova integrálu)

(i) $\int_0^K x^\alpha dx$ *konverguje* $\Leftrightarrow \alpha > -1 \forall K \in (0, \infty)$

(ii) $\int_\sigma^\infty x^\alpha dx$ *konverguje* $\Leftrightarrow \alpha < -1 \forall \sigma \in (0, \infty)$

Analogicky pro $\int_0^K (x-a)^\alpha dx$ *a* $\int_\sigma^\infty (b-x)^\alpha dx$

(iii) $\int_0^K x^\alpha |\log x|^\beta dx$ *konverguje* $\Leftrightarrow$ *buď* $\alpha > -1$ *nebo* $\alpha = -1 \& \beta < -1$

(iv) $\int_\sigma^\infty x^\alpha |\log x|^\beta dx$ *kovnerguje* $\Leftrightarrow$ *buď* $\alpha < -1$ *nebo* $\alpha = -1 \& \beta < -1$