

# 1 Metrické prostory

## 1.1 Úplné metrické prostory

**Pojem 1.1 (Cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru)** *Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $\{X_n\}$  je posloupnost prvků  $P$ . Řekneme, že  $\{X_n\}$  je **cauchyovská**, jestliže platí:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 : \rho(X_n, X_m) < \varepsilon$$

**Pojem 1.2 (Úplný metrický prostor)** *Řekneme, že metrický prostor  $(P, \rho)$  je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost v  $(P, \rho)$  je konvergentní v  $(P, \rho)$ .*

**Věta 1.1 (O vztahu kompaktnosti a úplnosti)** *Nechť je  $(P, \rho)$  kompaktní. Pak  $(P, \rho)$  je úplný.*

**Věta 1.2 (O vztahu uzavřenosti a úplnosti)** *Nechť  $(P, \rho)$  je úplný metrický prostor.  $M \subset P$  Pak platí  $(M, \rho|_{M \times M})$  je úplný  $\Leftrightarrow M$  je uzavřená v  $(P, \rho)$ .*

**Definice 1.1 (Průměr množiny)** *Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subset P$ ,  $A \neq \emptyset$ . **Dia-metrem** množiny  $A$  rozumíme:*

$$\text{diam } A = \sup\{\rho(x, y); x \in A, y \in A\}$$

**Definice 1.2 (Supremová metrika)**  $\rho(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$

**Definice 1.3 (Integrální metrika)**  $\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

**Definice 1.4 (Zděděná metrika)** *Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a nechť  $A \subset P$ ,  $A \neq \emptyset$  potom  $(A, \rho)$  je opět metrický prostor se **zděděnou (indukovanou)** metrikou  $\rho$ .*

**Věta 1.3 (Cantorova věta - bez důkazu)** *Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Pak je ekvi-valentní:*

(i)  $(P, \rho)$  je úplný

(ii) *Pro každou posloupnost v  $(P, \rho)$  uzavřených neprázdných množin  $\{A_n\}$ , která splňuje:  $\lim \text{diam } A_n = 0$  a  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ , platí že  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  je jednoprvková množina.*

## 1.2 Banachova věta o kontrakci

**Pojem 1.3 (Kontrakce)** *Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $T : P \rightarrow P$ . Řekneme, že  $T$  je **kontrakce**, jestliže existuje  $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$  takové, že*

$$\forall x, y \in P : \rho(T(x), T(y)) \leq \gamma \rho(x, y)$$

**Věta 1.4 (Banachova věta o kontrakci)** *Nechť  $(P, \rho)$  je úplný, neprázdný metrický prostor a  $T : P \rightarrow P$  je kontrakce. Pak existuje  $x^* \in P$  takové, že  $T(x^*) = x^*$ . Takové  $x^*$  existuje právě jedno.*

**Definice 1.5 (Neexpanzivní zobrazení)** Necht  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $T : P \rightarrow P$ . Řekneme, že  $T$  je **neexpanzivní zobrazení** jestliže:

$$\forall x, y \in P, x \neq y : \rho(T(x), T(y)) < \rho(x, y)$$

**Věta 1.5 (O pevném bodu neexpanzivního zobrazení)** Necht  $(P, \rho)$  je kompaktní,  $T : P \rightarrow P$  neexpanzivní. Potom  $T$  má v  $P$  právě jeden pevný bod.

**Věta 1.6 (O pevném bodu mocniny kontrakce)** Necht  $(P, \rho)$  je úplný metrický prostor a necht  $T : P \rightarrow P$ , pro které existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $T^n$  je kontrakce. Potom  $T$  má v  $P$  právě jeden pevný bod.

### 1.3 Souvislé metrické prostory

**Pojem 1.4 (Souvislý prostor)** Metrický prostor  $(P, \rho)$  se nazývá **nesouvislý**, jestliže existují dvě neprázdné, otevřené a disjinktní množiny  $G_1, G_2$  takové, že  $P = G_1 \cup G_2$ . V opačném případě je  $(P, \rho)$  **souvislý**. Neprázdná podmnožina  $A$  prostoru  $P$  se nazývá **nesouvislá**, jestliže je metrický prostor  $(A, \rho)$  nesouvislý.

**Definice 1.6 (Obojetná množina)** Množina  $H \subset P$  se nazývá **obojetná**, jestliže je neprázdná, různá od  $P$ , otevřená a uzavřená.

**Věta 1.7 (Charakterizace souvislých prostorů)** Pro  $(P, \rho)$  je ekvivalentní:

- (i)  $P$  je souvislý
- (ii) existuje obojetná množina  $H \subset P$
- (iii) existuje spojitě zobrazení  $f : P \xrightarrow{\text{na}} \{0, 1\}$
- (iv) existují dvě neprázdné disjinktní a uzavřené množiny  $F_1, F_2, P = F_1 \cup F_2$

**Věta 1.8 (Vlastnosti souvislých prostorů)**  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:

- (i) Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina
- (ii) Necht  $A$  je souvislá množina v  $(P, \rho)$ . Necht  $A \subset B \subset \overline{A}$ . Potom  $B$  je souvislá (a spec  $\overline{A}$  je souvislá).
- (iii) Necht množiny  $\{A_\alpha\}$  jsou souvislé v  $(P, \rho)$  a necht  $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$  potom  $\bigcap_\alpha A_\alpha$  je souvislá.
- (iv) Necht  $A \subset \mathbb{R}$  potom  $A$  je souvislá  $\Leftrightarrow A$  je interval.

**Definice 1.7 (Oblouk)** Množina  $I \subset (P, \rho)$  se nazývá **oblouk**, jestliže je to spojitý obraz uzavřeného intervalu.

**Definice 1.8 (Obloukově souvislá množina)** Množina  $A \subset (P, \rho)$  se nazývá **obloukově souvislá**, jestliže lze každé dva její body spojit obloukem.

**Věta 1.9 (O vztahu souvislosti a obloukové souvislosti)** Každá obloukově souvislá množina je souvislá.

## 2 Obyčejné diferenciální rovnice

### 2.1 Obyčejné diferenciální rovnice - základní pojmy a věty

**Definice 2.1 (Rozšíření řešení - nezk.)** Řekneme, že  $(\bar{y}, \bar{I})$  je rozšířením řešení  $(y, I)$ , jestliže:

- (i)  $\bar{y}$  řeší dif. rovnici na  $\bar{I}$
- (ii)  $I \subsetneq \bar{I}$
- (iii)  $\bar{y} = y$  na  $I$

**Pojem 2.1 (Maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice)**  $(y, I)$  je **maximální (úplné)** řešení dif. rovnice, jestliže

- (i)  $y$  řeší na  $I$
- (ii) neexistuje žádné rozšíření

**Věta 2.1 (Peanova věta - bez důkazu)** Necht  $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+k}$ ,  $f \in C(\Omega)$ . Necht  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ , potom existuje interval  $U(x_0)$  a funkce  $y$  definovaná aspoň na  $U(x_0)$  tak, že

$$\begin{aligned}y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x)) \\y(x_0) &= y_0 \\y'(x_0) &= y_1 \\&\vdots \\y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}\end{aligned}$$

**Definice 2.2 (Rovnice rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci)**

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x))$$

**Definice 2.3 (Lokálně lipschitzovské funkce více proměnných)**  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje **lokální lipschitzovskou podmínku** vzhledem posledním  $n$  proměnným, jestliže:

$$\forall U \subset \Omega, \text{ omezená, } \exists K, \forall (x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), (x, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) \in U : \\|f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) - f(x, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1})| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \bar{y}_i|$$

### 2.2 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

**Věta 2.2 (Peanova pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu - nezk.)** Necht  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Potom  $\exists (x_0 - \delta, x_0 + \gamma) \exists y$  definovaná aspoň na  $(x_0 - \delta, x_0 + \gamma)$  taková, že:

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y(x)) \\y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

**Věta 2.3 (Picardova pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu)** Necht  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá,  $(x_0, y_0) \in \Omega$  a necht platí podmínka lokální lipschitzovskosti pro  $y$ :

$$\forall U \subset \Omega \exists K : |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq K(x - \bar{y}) \quad (x, y), (x, \bar{y}) \in U$$

Potom je řešení lokálně jednoznačné. (Každá dvě řešení splývají na průniku svých definičních oborů, existuje-li maximální řešení, pak je jediné)

**Definice 2.4 (Obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými)**

$$y' = f(x)g(y)$$

**Věta 2.4 (O existenci řešení rovnice se separovanými proměnnými - bez důkazu)** Necht  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá,  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá a nenulová,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in (c, d)$ . Pak bodem  $(x_0, y_0)$  prochází právě jedno maximální řešení  $y$  rovnice  $y' = f(x)g(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ .

**Definice 2.5 (Lineární obyčejné diferenciální rovnice)**

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)y(x) + b(x) \\ y' &= ay + b \end{aligned}$$

$a, b$  spojitě funkce na  $I$

## 2.3 Systémy lineárních rovnic 1. řádu a lineární rovnice řádu $n$

**Definice 2.6 (Lineární obyčejná diferenciální rovnice - nezk.)**  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, n-1, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  spojitě. Rovnici  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b$  nazveme **lineární ODR řádu  $n$** .

**Definice 2.7 (Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic)**

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1, \dots, y_n : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ a_{ij} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ b_i : I &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \text{spojité}$$

Podmínky:  $y_i(x_0) = (y^0)_i$ . Zkrácený maticový zápis:  $y' = Ay + b$ , kde  $y, b$  jsou vektorové funkce  $y, b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  maticová funkce  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Věta 2.5 (O globální existenci a jednoznačnosti řešení systému lineárních ODR 1. řádu)**

$I \subset \mathbb{R}$ ,  $a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  spojitě,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y^0 \in \mathbb{R}^n$ . Potom existuje právě jedno řešení  $y$  systému  $y' = Ax + b$  jehož definičním oborem je  $I$  splňující okrajovou podmínku  $y(x_0) = y^0$ . To jest

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j(x) + b_i(x) \quad \forall x \in I \quad i = 1, \dots, n$$

a podm.  $y_i(x_0) = (y^0)_i$

**Věta 2.6 (Vlastnosti prostoru řešení systému lineárních ODR 1. řádu)** *Nechť je dán systém  $y' = Ax + b$ , s obvyklými podmínkami. Označíme-li  $Ly = y' - Ay$ ,  $H = \text{Ker } L = \{y, Ly = 0\}$ , pak platí:*

- (i)  $L$  je lineární zobrazení,  $H$  je vektorový prostor dimenze  $n$ .
- (ii) Označme  $M = \{y, Ly = b\}$ . Potom existuje  $y_0$  takové, že  $M = y_0 + H = \{y_0 + h, h \in H\}$  a  $Ly_0 = b$

**Pojem 2.2 (Fundamentální matice homogenního systému ODR 1. řádu)** *Fundamentálním systémem řešení homogenního systému  $y' = Ay + b$  nazýváme libovolnou bázi prostoru  $H$ . Nechť  $[y^1, \dots, y^n]$  je FSŘ systému  $y' = Ay + b$ , potom funkce  $y^i$  chápeme jako sloupcové vektory, které lze poskládat do tzv. **fundamentální matice homogenního systému***

**Definice 2.8 (Wronského determinant)** *Nechť  $f^1, \dots, f^n$  jsou vektorové funkce na  $I$ . Pak **Wronskiánem** funkcí  $f^1, \dots, f^n$  nazýváme funkci  $W(x) = W_{(f^1, \dots, f^n)}, W : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definovanou předpisem:*

$$W_{f^1, \dots, f^n}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & \dots & f_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^1(x) & \dots & f_n^n(x) \end{pmatrix}, x \in I$$

**Věta 2.7 (O Wronskiánu a lineární závislosti řešení)** *Nechť  $[y^1, \dots, y^n]$  jsou řešení systému  $y' = Ay$ , kde  $A$  je spojitá matice*

- (i) *jestliže  $W(x_0) = 0$  pro nějaké  $x_0 \in I$ , pak je  $W(x) \equiv 0$  pro všechna  $x \in I$  a  $[y^1, \dots, y^n]$  jsou lineárně závislé*
- (ii) *jestliže  $W(x_0) \neq 0$  pro nějaké  $x_0 \in I$ , pak je  $W(x) \neq 0$  pro všechna  $x \in I$  a  $[y^1, \dots, y^n]$  jsou lineárně nezávislé.*

**Věta 2.8 (O variaci konstant pro systém lineárních ODR 1. řádu)** *Nechť  $A, b$  spojité, nechť  $[y^1, \dots, y^n]$  je FSŘ homogenního systému  $y' = Ay + b$ . Potom existují  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}, c_i \in C(I)$  takové, že  $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y^i(x)$  je řešením nehomogenního systému  $y' = Ay + b$ .*

## 2.4 Rovnice a systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty

**Definice 2.9 (Vlastní číslo a vlastní vektor matice)**  $\lambda$  je **vlastní číslo** matice  $A$ , pokud existuje nenulový vektor  $v$  tak, že  $Av = \lambda v$ . Takový vektor se nazývá **vlastní vektor** příslušný k  $\lambda$ .  $v$  je vlastní vektor příslušný k  $\lambda \Leftrightarrow v$  je nenulovým řešením soustavy  $(A - \lambda E)v = 0$ .  $\lambda$  je vlastní číslo matice  $A$ , jestliže platí:  $P(\lambda) = \det(A - \lambda E), P(\lambda) = 0$ .

**Věta 2.9 (O FSŘ systému lineárních ODR 1. řádu s bází z vlastních vektorů)** *Nechť  $A$  je podobná diagonální matici, nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou vlastní čísla  $A$  (každé tolikrát, kolik je jeho násobnost),  $v^1, \dots, v^n$  jsou příslušné vektory. Potom matice  $(v^1 e^{\lambda_1 x}, \dots, v^n e^{\lambda_n x})$  tvoří FSŘ systému  $y' = Ay + b$ .*

**Definice 2.10 (Přidružený vektor, řetězec)** *Systém nenulových vektorů  $v^1, \dots, v^k$  nazveme řetězcem odpovídajícím vlastnímu číslu  $\lambda$  matice  $A$ , jestliže:*

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)v^1 &= 0 && v^1 \text{ vlastní} \\ (A - \lambda E)v^2 &= v^1 && v^2 \text{ přidružený vektor stupně 1} \\ &\vdots && \\ (A - \lambda E)v^k &= v^{k-1} && v^k \text{ přidružený vektor stupně } k-1 \end{aligned}$$

*Ke každému Jordanovu bloku délky  $k$  existuje řetězec délky  $k$ .*

**Definice 2.11 (Exponenciála matice)** *Nechť  $A$  je čtvercová matice typu  $(n \times n)$ . Potom  $\exp A$  označuje čtvercovou matici  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ . Speciálně definujeme maticovou funkci  $e^{Ax} = \sum \frac{A^k x^k}{k!}$   $x \in \mathbb{R}$ .*

**Věta 2.10 (Vlastnosti exponenciály na matici - bez důkazu)**

(i)  $A, B$  typu  $(n \times n)$ , potom  $e^{A+B} = e^A e^B$

(ii)  $\frac{d}{dx}(e^{Ax}) = Ae^{Ax}$

**Věta 2.11 (O FSŘ systému lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty)** *Nechť  $A$  je čtvercová, typu  $(n \times n)$ ,  $H = \{y, y' = Ay\}$ . Potom  $H = \{y = e^{Ax}v, v \in \mathbb{R}^n\}$  a existuje*

*FSŘ  $H$  ve tvaru  $(y^1, \dots, y^n)$ , kde  $y^j = e^{\lambda_j x} \begin{pmatrix} P_1^j(x) \\ \vdots \\ P_n^j(x) \end{pmatrix}$ , přičemž  $\lambda_i$  je vlastní číslo  $A$  a  $P_i^j$*

*jsou polynomy stupně  $\leq$  násobnosti  $\lambda_j$ .*